Extrême et moyenne raison

André Ross
Cégep de Lévis-Lauzon

Introduction

Les pythagoriciens avaient déterminé diverses façons de diviser un segment de droite pour construire des rapports. L'une de ces méthodes est la division en extrême et moyenne raison. Il s'agit de déterminer un point C sur un segment de droite AB de telle sorte que :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$$

Ce rapport a joui au cours des siècles d'un statut particulier auprès des mystiques et des artistes et a porté les noms de « nombre d'or » et de « divine proportion ». On lui a accordé un rôle mystérieux et sacré. Il fut à une certaine époque considéré comme la clé de l'équilibre et de l'harmonie.

Pourquoi cet engouement pour un nombre dont les utilisations pratiques sont beaucoup plus restreintes que celles du nombre π ou du nombre e ? Par l'étude des propriétés de ce rapport, nous allons tenter de comprendre cet engouement.

Construction et démonstration

Le problème géométrique consiste à diviser un segment de droite AB de longueur quelconque

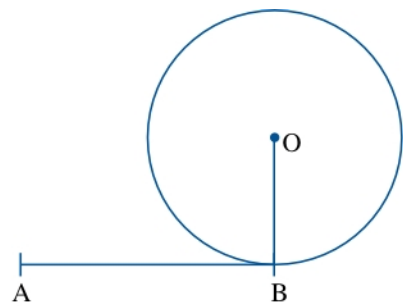
de telle sorte que $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$.

Nous allons voir comment déterminer ce point par une construction géométrique, puis nous démontrerons par les rapports et proportions que le point obtenu est bien celui cherché.

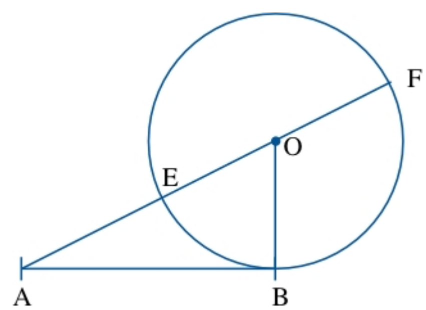
Division en extrême et moyenne raison

Sur le segment de droite AB, élevons en B une droite BO perpendiculaire à AB et telle que la longueur du segment BO soit la moitié de celle du segment AB.

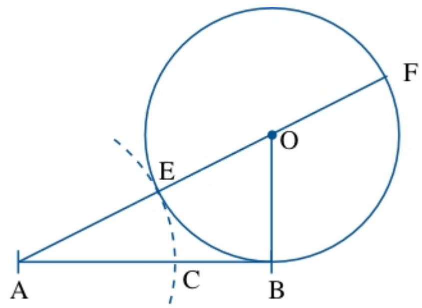
Traçons le cercle de centre O et de rayon OB. Par construction, le segment AB est alors tangent au cercle.



Traçons maintenant la droite passant par le point A et le point O, centre du cercle. Cette droite coupe le cercle aux points E et F.



En prenant le point A comme centre et la longueur AE comme rayon, traçons un arc de cercle de façon à reporter la longueur AE sur la droite AB. On détermine ainsi un point C sur la droite AB.

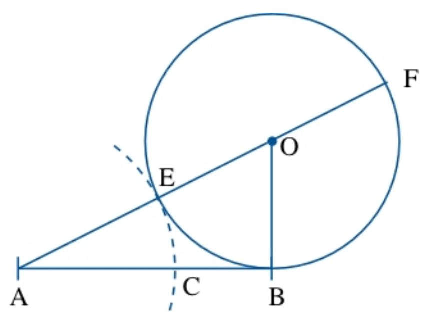


Démonstration

Il reste à montrer que le point C est bien celui pour lequel

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$$

L'argument est le suivant : Par construction, la droite AB est tangente au cercle au point B. En effet, la droite AB et le rayon OB sont perpendiculaires et, toute droite perpendiculaire à l'extrémité du rayon d'un cercle est tangente à ce cercle.



De plus, la droite AF est une sécante du cercle. Or, lorsque d'un point hors d'un cercle on trace une tangente et une sécante à ce cercle, la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure. La partie extérieure au cercle de la sécante AF est le segment AE. On peut donc écrire :

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AF}}. \tag{1}$$

Cependant, $\overline{AE} = \overline{AC}, \overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$ et $\overline{AF} = \overline{AE} + \overline{EF}$. De plus, puisque le rayon du cercle est la moitié de la longueur du segment AB, le diamètre est de même longueur que le segment AB, d'où $\overline{EF} = \overline{AB}$. On peut donc écrire :

$$\overline{AF} = \overline{AE} + \overline{EF} = \overline{AC} + \overline{AB}$$

et, par substitution en (1), on obtient :

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AC}+\overline{CB}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}+\overline{AB}}$$

En effectuant le produit des extrêmes et le produit des moyens de cette proportion, on a :

$$\overline{AC}(\overline{AC}+\overline{AB})=\overline{AB}(\overline{AC}+\overline{CB})$$

Et, en distribuant :

$$\overline{AC}^2+(\overline{AC}\times\overline{AB})=(\overline{AB}\times\overline{AC})+(\overline{AB}\times\overline{CB})$$

en soustrayant la quantité $\overline{AB}\times\overline{AC}$ aux deux membres de l'égalité, on trouve :

$$\overline{AC}^2=\overline{AB}\times\overline{CB} \text{ ou } \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.$$

On obtient donc le rapport cherché et le point C obtenu par la construction est bien le point qui divise le segment AB en extrême et moyenne raison. En d'autres mots, AC est moyenne proportionnelle entre le segment entier AB et son plus petit segment CB.
La valeur de ce rapport d'extrême et moyenne raison est appelé *nombre d'or* et représenté par la lettre φ (phi).

Valeur numérique

On peut déterminer la valeur numérique du rapport d'extrême et moyenne raison de la façon suivante. Représentons par a la longueur du segment AB et par b la longueur du segment AC.

Le nombre φ est alors le rapport a/b. De plus, la longueur du segment BC est $a-b$, et on peut alors écrire :

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{a-b}$$

d'où :

$$a^2-ab=b^2,$$

et :

$$a^2-ab-b^2=0.$$

Puisque l'on veut isoler le rapport a/b, on peut diviser par b^2, ce qui donne :

$$\frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b} - 1 = 0.$$

Les racines de cette équation quadratique donnent :

$$\frac{a}{b} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

La racine positive est le nombre d'or soit :

$$\varphi = \frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618033989...$$

On peut facilement montrer, par rationnalisation, que le rapport $-1/\varphi$ donne la racine négative, soit :

$$\frac{-1}{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0{,}618033989...$$

L'équation $\frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b} - 1 = 0$ dont la racine positive est la valeur numérique du nombre d'or peut donc s'écrire :

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

On appelle cette équation l'*équation caractéristique du nombre d'or*.

Cette équation donne quelques caractéristiques numériques amusantes du nombre d'or. En effet, on en tire :

$$\varphi^2 = 1 + \varphi$$

et :

$$\varphi = \sqrt{1+\varphi}$$

En substituant cette expression de φ dans la partie de droite de l'équation, on a alors :

$$\varphi = \sqrt{1+\sqrt{1+\varphi}}$$

En poursuivant, on obtient :

$$\begin{aligned}
\varphi &= \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\varphi}}} \\
&= \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\varphi}}}} \\
&\vdots \\
&= \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}}}
\end{aligned}$$

On peut également transformer l'équation caractéristique de la façon suivante :

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

En divisant les deux membres de l'équation par φ, on a :

$$\varphi = \frac{\varphi + 1}{\varphi}$$

d'où :

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

En substituant cette expression de φ dans la partie de droite de l'équation, on a alors :

$$\begin{aligned}
\varphi &= 1 + \frac{1}{\varphi} \\
&= 1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}} \\
&= 1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}}} \\
&\vdots \\
&= 1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}}}
\end{aligned}$$

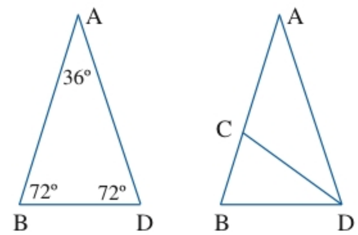
Il est à remarquer que l'on peut faire des expressions similaires à partir de bien des équations quadratiques, il n'y a rien ici de particulier.

Triangles isocèles et nombre d'or

Il y a différents triangles dont le rapport de côtés donne le nombre d'or. Nous allons en présenter quelques-uns.

Triangle TI-1

Considérons le triangle isocèle ABC ayant un angle de 36°et deux angles de 72°que nous désignerons par TI-1 (triangle isocèle 1). On peut montrer que le rapport du grand côté de ce triangle sur le petit côté donne le nombre d'or. Pour ce faire, traçons la bissectrice de l'angle ADB qui coupe le côté AB au point C.



On construit alors un nouveau triangle isocèle, le triangle BCD. En effet, DC étant la bissectrice, l'angle BDC mesure 36°et l'angle DBC mesure 72°. La somme des angles intérieurs du triangle étant de 180°, l'angle BCD mesure également 72°. De la même façon, on constate que le triangle ACD est un triangle ayant deux angles de 36°et un angle de 108°, il est donc isocèle. En vertu du théorème suivant :

Dans tout triangle, la bissectrice d'un angle divise le côté opposé dans le rapport des côtés adjacents.

On peut donc écrire la proportion :

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$$

Par ailleurs, on a $\overline{AD} = \overline{AB}$ comme côtés congrus du triangle isocèle ABD. De plus, $\overline{BD} = \overline{CD}$ comme côtés congrus du triangle isocèle BDC et $\overline{CD} = \overline{AC}$, comme côtés congrus du triangle isocèle ACD. On a donc :

$$\overline{BD} = \overline{CD} = \overline{AC}$$

On peut donc substituer et obtenir :

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$$

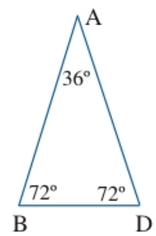
On constate que le point C divise le côté AB en extrême et moyenne raison. On a donc :

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \varphi$$

Par conséquent, dans un triangle TI-1, le rapport du grand côté du triangle sur le petit côté donne le nombre d'or. Ou encore, le rapport d'un des côtés égaux sur la base donne le nombre d'or.

Nombre d'or et trigonométrie

Par la loi de sinus, on sait que dans tout triangle le rapport du sinus d'un angle sur le côté opposé à cet angle est constant.



On a donc :

$$\frac{\sin B}{\overline{AD}} = \frac{\sin A}{\overline{BD}},$$

d'où :

$$\frac{\sin B}{\sin A} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \varphi,$$

et :

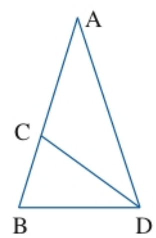
$$\frac{\sin 72^{\circ}}{\sin 36^{\circ}} = \varphi.$$

qui est l'expression trigonométrique du nombre d'or.

Triangle TI-2

Dans les ouvrages portant sur l'utilisation du nombre d'or en peinture, on retrouve plusieurs formes géométriques qui sont apparentées de près ou de loin au nombre d'or. On y trouve des triangles isocèles et des rectangles. Voici quelques-unes de ces formes.

En effectuant la démonstration précédente, nous avons tracé la bissectrice de l'angle ADB. Cette construction a fait apparaître le triangle isocèle ACD qui a un angle de 108°et deux angles de 36°. Nous désignerons ce triangle isocèle par TI-2.



Dans ce triangle, le rapport du grand côté sur le petit côté donne également le nombre d'or. En effet, puisque $\overline{BD} = \overline{CD}$ comme côtés congrus d'un triangle isocèle, on a :

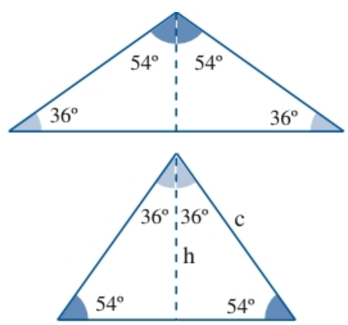
$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \varphi.$$

Par conséquent, dans un triangle TI-2, le rapport du grand côté du triangle sur le petit côté donne également le nombre d'or. Ou encore, le rapport de la base à un des côtés égaux donne le nombre d'or.

Triangle TI-3

On peut construire d'autres triangles isocèles associés au nombre d'or et les personnes qui cherchent à traquer le nombre d'or dans les oeuvres d'art ne s'en sont pas privées. Voici comment ils procèdent.

En sectionnant le triangle TI-2, et en redisposant les triangles rectangles, on obtient le triangle TI-3. Ce triangle isocèle a deux angles de 54°et un angle de 72°.

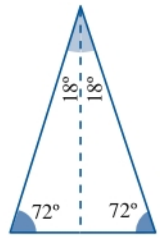


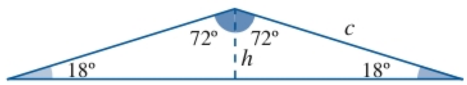
Dans le triangle TI-3, le rapport de la hauteur à un des côtés égaux donne :

$$\frac{h}{c} = \frac{\varphi}{2}.$$

Triangle TI-4

En sectionnant le triangle TI-1 et en redisposant les triangles rectangles on obtient le triangle TI-4. Ce triangle isocèle a deux angles de 18°et un angle de 144°.





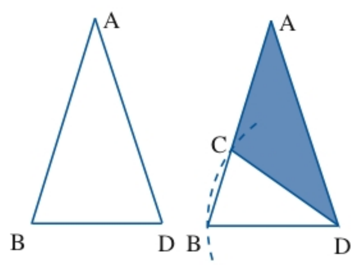
Dans le triangle TI-4, le rapport d'un des côtés égaux à la hauteur donne :

$$\frac{c}{h} = 2\varphi.$$

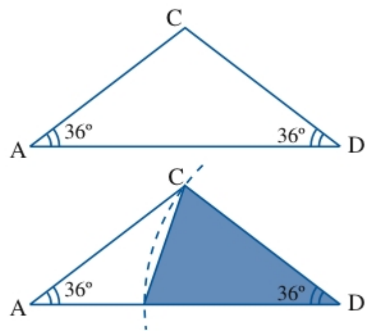
On remarque que, dans tous ces triangles isocèles, les angles sont des multiples de 18°.

Complémentarité des triangles

À l'intérieur d'un triangle TI-1, on peut, à l'aide de la règle et du compas, construire un triangle TI-2 de la façon suivante. Avec D comme centre et DB comme rayon, on trace un arc de cercle qui coupe le côté AB en un point C qui est le troisième sommet d'un triangle TI-2.

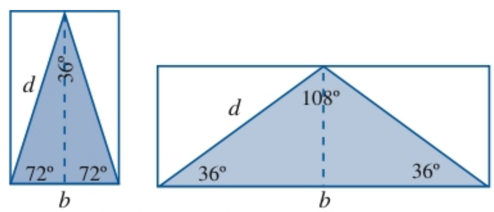


À l'intérieur d'un triangle TI-2, on peut, à l'aide de la règle et du compas, construire un triangle TI-1 de la façon suivante. Avec D comme centre et DC comme rayon, on trace un arc de cercle qui coupe le côté DA en un point B qui est le troisième sommet d'un triangle TI-2.



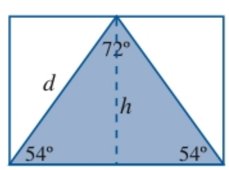
Rectangles et nombre d'or

Tout rectangle dans lequel on peut inscrire un des triangles isocèles précédents est d'une certaine façon associé au nombre d'or et pour plusieurs constitue une *preuve* de l'utilisation du nombre d'or par les artistes.

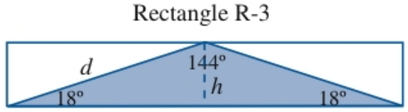


Rectangle R-1 Rectangle R-2

La base de ces rectangles est la base du triangle isocèle associé. Représentons par d la droite qui joint un des sommets de la base au point milieu du côté opposé et par b. On peut de la même façon, construire des rectangles associées en inscrivant les triangles TI-3 et TI-4 dans des rectangles.



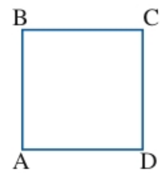
Rectangle R-3



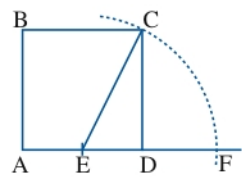
Rectangle R-4

Rectangle d'or

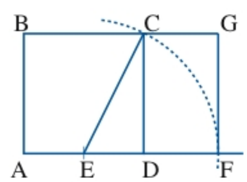
Le rectangle auquel on se réfère le plus souvent lorsqu'on parle du rectangle d'or est obtenu de la façon suivante . Considérons un carré $ABCD$.



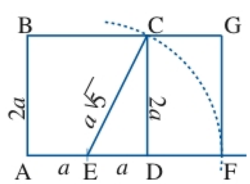
On détermine d'abord le point milieu E du côté AD à l'aide du compas et de la règle. En prenant le point milieu E comme centre et le segment EC comme rayon, on trace un arc de cercle qui coupe le prolongement du côté AD au point F.



Le segment AF est alors l'autre côté du rectangle cherché. On peut alors fermer le rectangle, ce qui donne



Dans ce rectangle, le rapport du grand côté au petit côté est égal au nombre d'or.

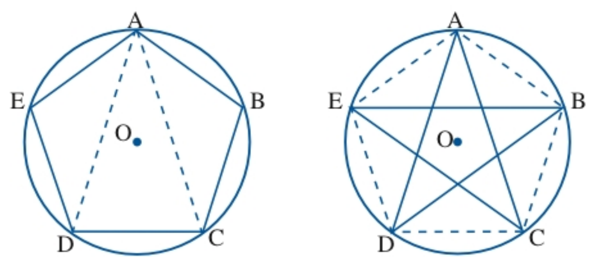


Pentagone et décagone réguliers

Dans les pentagones et décagones, réguliers convexes et étoilés, on retrouve des triangles TI-1 et TI-2. On retrouve donc dans ces polygones des lignes dont le rapport des côtés donne le nombre d'or. La procédure pour inscrire un pentagone régulier dans un cercle est d'ailleurs la même que pour diviser un segment en extrême et moyenne raison. Montrons d'abord que l'on obtient bien les triangles TI-1 et TI-2 dans les pentagones et les décagones, puis nous verrons comment inscrire un pentagone dans un cercle.

Pentagone régulier et pentagone étoilé

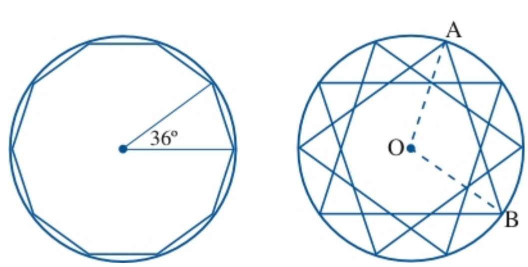
Considérons un pentagone régulier convexe inscrit dans un cercle. On peut facilement montrer en déterminant la mesure des angles inscrits que le triangle ACD est un TI-1 alors que le triangle ABC est un TI-2.



En joignant les sommets non contiguës, on forme le pentagone régulier étoilé dans lequel on remarque facilement la présence des mêmes triangles.
Le pentagone étoilé, appelé aussi pentacle (pentagramme ou pentalpha) était utilisé comme signe de reconnaissance par les membres de la société pythagoricienne. Le pentacle était également considéré comme symbole universel de perfection, de vie, de beauté et d'amour.

Décagone régulier et décagone étoilé

Considérons maintenant le décagone régulier convexe. L'angle au centre formé par les rayons aboutissant aux extrémités d'un des côtés est un angle de 36°. Comme le triangle ainsi formé est isocèle, c'est un triangle TI-1. On peut en joignant les sommets et le centre de différentes façons obtenir les triangles présentés précédemment.



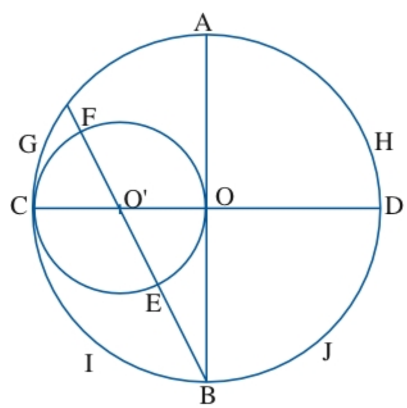
En joignant les sommets de telle sorte que chaque sommet soit relié à son troisième voisin, on obtient le décagone régulier étoilé dans lequel la présence des triangles de différentes formes est également évidente.

Construction d'un pentagone régulier

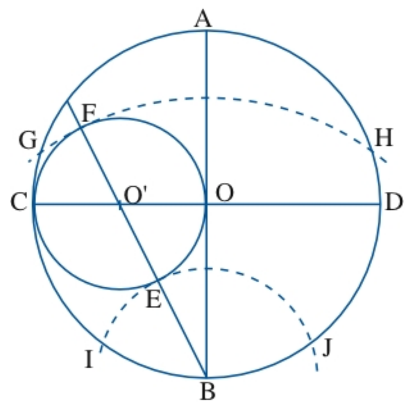
Ce procédé découle de la méthode que nous avons vue pour diviser un segment AB en extrême et moyenne raison.

Soit un cercle de centre O. On trace d'abord deux diamètres perpendiculaires AB et CD, puis on détermine O' point milieu du rayon OC. On trace alors le cercle de centre O' et de rayon OO'.

On trace ensuite la droite passant par les points B et O'. Cette droite coupe le cercle de centre OO' aux points E et F. En traçant les arcs de cercle de rayon BE et BF, onobtient sur la circonférence les points G, H, I, J. Ces quatre points sont quatre sommets du pentagone inscrit, le cinquième étant le point A.



La longueur BE est la longueur du côté du décagone convexe. En reportant cette longueur sur le cercle à partir du point A, on détermine tous les sommets du décagone. Il suffit alors de joindre ces sommets pour tracer la figure.



On remarquera que toutes ces constructions ne nécessitent qu'une règle et un compas.

Mystique du nombre d'or

Nous avons présenté succinctement les propriétés du nombre d'or, nous allons voir maintenant différentes interprétations mystiques et magiques de ce nombre.

La mystique des nombres remonte aux Pythagoriciens. Pour eux, les nombres avaient une valeur symbolique. Ainsi, le nombre « un » représentait la raison, car seule la raison pouvait produire un ensemble consistant et harmonieux de connaissances. Les nombres pairs étaient les nombres féminins et les nombres impairs étaient les nombres masculins.

Le nombre « deux », premier nombre pair, symbolisait l'opinion puisque la notion d'opinion implique la possibilité d'une opinion contraire, et donc d'au moins deux opinions.

Le nombre « trois », premier nombre triangulaire est également le premier nombre masculin.

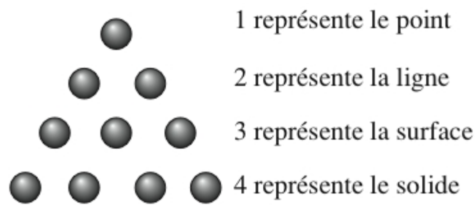
Le nombre « quatre » symbolisait la justice et l'équité car c'est le premier nombre obtenu par le produit de nombres égaux, c'est-à-dire le premier nombre carré.

La suite des quatre premiers nombres entiers $1, 2, 3, 4$ était appelée la *Tétractys* et leur somme

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

donne la Décade. La Tétractys revêtait une telle importance aux yeux des Pythagoriciens qu'elle est mentionnée explicitement dans la formule du serment sacré par lequel les membres de la secte s'engageaient au secret.

La valeur mystique de la Tétractys était basée aussi bien sur les symboles que constituaient les nombres $1, 2, 3$ et 4 que sur les relations numériques entre ces nombres. La signification symbolique de ces nombres était la suivante



De plus, certains rapports musicaux sont obtenus par le rapport des nombres de la Tétractys, 1/2 donne l'octave, 3/4 la quarte et 2/3 la quinte.

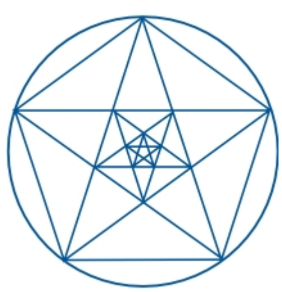
Pour les Pythagoriciens, la Décade était le nombre idéal symbolisant l'univers tel qu'ils le concevaient en accord avec cette croyance. Pour eux, il y avait dix corps en mouvement dans les cieux : Mercure, Vénus, Mars, Jupiter, Saturne, le Soleil, la Lune et la sphère étoilée. De plus, la terre tournait autour d'un feu central que l'on ne pouvait voir car il était du côté inhabité de la terre, Sa lumière et sa chaleur étaient réfléchies par le Soleil. Le dixième corps était appelé Antikton ou anti-Terre. Ce corps était également en révolution autour du feu central mais à l'opposé de la terre, on ne pouvait donc le voir.

De plus, si on divise la Décade par deux, on obtient la Pentade qui symbolisait le mariage car le nombre « cinq » est l'union de « deux »le premier nombre pair ou féminin et de « trois » le premier nombre masculin. Ces considérations ont créé une étroite relation entre la mystique des nombres dix et cinq et la mystique du nombre d'or par le décagone et le pentagone. Rien d'étonnant donc à ce que les Pythagoriciens aient considéré le pentagramme (pentagone étoilé) comme symbole de perfection, de vie, de beauté et d'amour et qu'ils l'aient utilisé comme signe de reconnaissance.

Cette mystique a été à la base de l'utilisation du pentagramme dans les arts aussi bien dans un but esthétique que pour invoquer ou rendre propices des forces secrètes. Le pentagramme se retrouve dans les rosaces de certaines cathédrales l'église Saint-Ouen de Rouen, la cathédrale d'Amiens, l'église Saint-Rémi de Troyes. Il figure également dans les armoiries et le drapeau du Maroc et sur le drapeau de plusieurs autres pays. Il est utilisé comme sigle de la compagnie Chrysler et était utilisé par la compagnie Texaco.

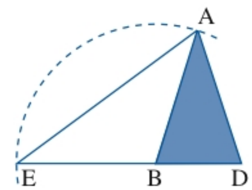
Les structures pentagonales que l'on retrouve dans certaines fleurs et dans les étoiles de mer ainsi que les croissances en spirale sont d'autres motifs pour donner au nombre d'or une signification particulière et l'associer à la beauté.

Les pentagones convexes et étoilés, inscrits l'un dans l'autre donne une régression infinie.

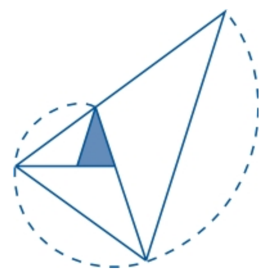


Nombre d'or et croissance en spirale

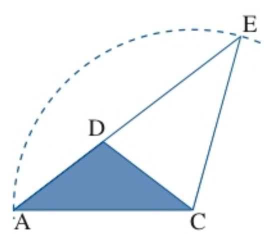
Considérons le triangle TI-1 suivant. En traçant un arc de cercle de rayon BA avec B comme centre, on détermine un point E sur le prolongement de DB. Le triangle ABE est alors un triangle TI-2 et le triangle EAD est un triangle TI-1.



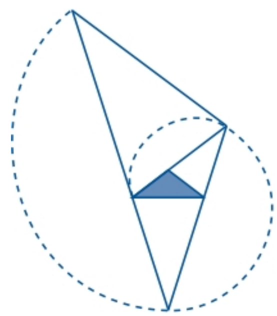
Par l'ajout successif de triangles TI-2 selon cette procédure, on obtient une croissance spiralée du triangle TI-1.



Considérons le triangle TI-2 suivant. En traçant un arc de cercle de rayon CA avec C comme centre, on détermine un point E sur le prolongement de AD. Le triangle EDC est alors un triangle TI-1 et le triangle ACE est un triangle TI-2.



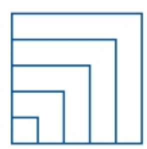
Par l'ajout successif de triangles TI-1 selon cette procédure, on obtient une croissance spiralée du triangle TI-2.



Dans un processus de croissance spiralée, le triangle garde toujours sa forme de départ.

Les spirales ont toujours symbolisé la croissance et la vie. Il existe de nombreux exemples de croissance en spirale dans la nature. Ces croissances se font par l'ajout systématique d'un élément de même forme.

C'est ce qu'illustre la figure suivante qui est la coupe d'un nautile. On constate que la croissance se fait par l'ajout d'un élé-Carré et gnomon ment qui est toujours de même forme.



Carré et gnomon

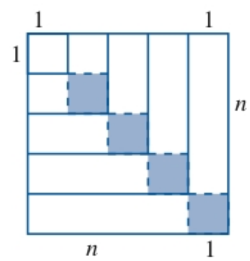
Gnomon

Selon Héron d'Alexandrie, un *gnomon* est la chose qui ajoutée à quelque chose d'autre, figure ou nombre, forme un tout semblable à la chose à laquelle elle a été ajoutée. Selon cette définition, les triangles TI-1 et TI-2 sont gnomon l'un de l'autre.

Héron dit que cette définition s'applique également aux nombres. Voici un exemple. $2n+1$ est le gnomon des nombres carrés car en additionnant $2n+1$ à n^2, on obtient également un carré, en effet :

$$n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

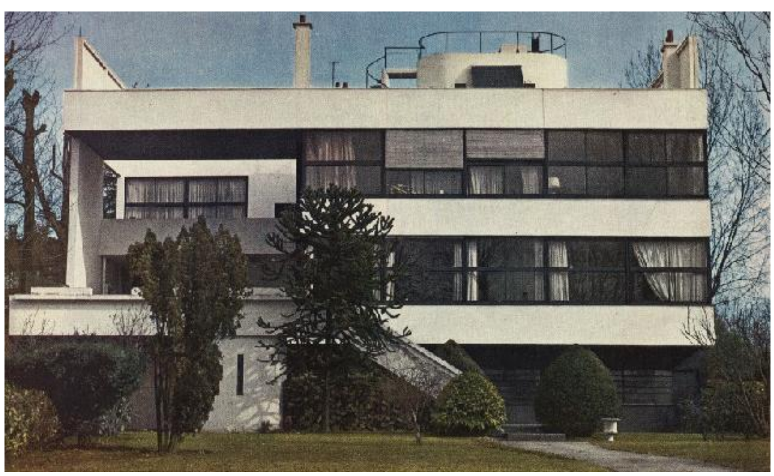
Cette propriété peut se représenter géométriquement de la façon ci-contre.
L'aire du gnomon ajouté au carré de côté n est constitué de deux bandes rectangulaires et d'un carré. La longueur des bandes rectangulaires est n et la largeur est 1. L'aire de ces bandes est donc de n unités carrées. L'aire du carré de côté unitaire est d'une unité carrée. L'aire du gnomon est donc $2n+1$ unités carrées.



On retrouve également les croissances spiralées dans les coeurs de marguerite, de tournesol, de céleri. Dans ls cônes de pins, les ananas, etc.


Toutes ces occurences du nombre d'or dans la nature a accrédité la croyance que ce rapport constituait un secret de la création de l'univers, un canon de la beauté.
On a donc tenté de le retrouver un peu partout. On a prétendu que le Parthénon d'Athènes s'inscrivait dans un rectangle d'or. Cela est difficile à confirmer et à infirmer quand on regarde dans quel état il se trouve.

On sait cependant que les plans des temples grecs étaient conçus en respectant des proportions très strictes pour en assurer l'harmonie.
On prétend également que l'architecte français Le Corbusier a utilisé les dimensions d'un rectangle d'or pour concevoir la maison suivante.



Cependant, l'étude du Modulor de Le Corbusier donne plutôt à penser qu'il s'est inspiré d'une démarche analogue à celle permettant de construire la suite de Fibonacci dont le rapport des termes consécutifs tend vers le nombre d'or.

La géométrie contient deux grands trésors : l'un est le théorème de Pythagore ; l'autre est la division d'une ligne en moyenne et extrême raison. Le premier peut être comparé à une règle d'or ; le second à un joyau précieux.

Johann KEPLER

Nombre d'or en peinture

Au Moyen-Âge, les peintres, comme les savants, étaient protégés par les Princes ce qui leur permettait d'avoir facilement accès aux copies de manuscrits qui parvenaient en Europe et que les Princes se procuraient pour étaler leur puissance. Les constructions géométriques associées au nombre d'or ont alors intéressé les peintres qui les ont utilisées comme structures sous-jacentes dans certaines peintures. Il est à remarquer que les peintures du Moyen-Age n'utilisaient pas toutes des structures pentagonales ou décagonales, plusieurs peintures sont basées sur l'utilisation du carré, du triangle, de l'hexagone ou de l'octogone.

Cependant, ces différentes figures sont facilement constructibles alors que pour construire un pentagone ou un décagone il faut utiliser des procédés plus complexes basés sur le nombre d'or. De plus, il semble que les constructions associées au nombre d'or aient été des secrets jalousement gardés par les écoles d'artistes qui les utilisaient.

On peut se demander pourquoi les peintres du Moyen-Âge utilisaient les constructions géométriques comme structure sous-jacente à leur peinture. Pour tenter de répondre à cette question, il est bon de rappeler qu'au Moyen-Âge, la peinture avait essentiellement pour but d'illustrer les grands moments du drame chrétien. La peinture était donc plus conceptuelle que réaliste, c' est-à-dire que la conformité de la scène peinte avec une scène réelle n'était pas un des objectifs du peintre. Le peintre cherchait à représenter un concept par l'emploi de différents symbolismes. Il pouvait à cet effet choisir un fond de scène doré pour symboliser un monde supranaturel dans lequel évoluaient les saints et les différents personnages de la peinture. De la même façon, les structures géométriques sous-jacentes représentaient l'équilibre, la beauté, la stabilité d'un monde idyllique. C'est à la Renaissance, avec le développement de la perspective que l'utilisation de la géométrie dans l'organisation picturale a visé la cohérence et la conformité avec le réel tel que perçu par les sens. Depuis, les peintres se sont libérés de cette contrainte pour créer sur toile un univers plus personnel.

Mais revenons à la période charnière du Moyen Âge à la Renaissance. Deux peintres de cette période retiennent particulièrement l'attention. Ce sont Piero della Francesca et Luca

Paciol. En plus d'être peintres, ils étaient mathématiciens et ont réalisé des études sur le nombre d'or. Piero della Francesca a également poursuivi des recherches dans le domaine de la perspective. Certaines de ses œuvres sont de facture conceptuelle et semblent avoir été conçues en exploitant les pentagones étoilés ainsi que les triangles inscrirs dans ceux-ci. C'est le cas de la Vierge de Miséricorde et du Baptême du Christ.

La vierge de miséricorde,

Piero Della Francesca

Dans la Vierge de Miséricorde, Piero della Francesca divise son tableau en trois plages par des cercles construits de telle sorte que le centre du cercle inférieur est sur la circonférence du cercle supérieur.

La partie supérieure du tableau est réservée à la Vierge. Les figurants sont confinés dans la plage inférieure.

Le baptême du Christ,

Piero Della Francesca

Dans le Baptême du Christ, Francesca utilise le même stratagème pour diviser le tableau en trois plages. L'orga-nisation globale est gérée par les pentagones étoilés inversés l'un par rapport à l'autre. Le personnage du Christ s'inscrit dans un triangle TI-1.

La position de la colombe symbolisant l'Esprit-Saint, les bras de Saint Jean Baptiste, les positions des personnages, tout est organisé en fonction des triangles et rectangles que l'on peut tracer à partir de ces deux pentagones. Fra Luca Pacioli de Borgo San Sepolcro en Toscane (1410-1492) était un père Franciscain qui s'adonnait à la peinture, aux mathématiques et à la géométrie. Il fut l'élève et l'ami de Piero della Francesca et écrivit un livre intitulé *Divina Proportione* (La Divine Proportion) qui était l'appellation du nombre d'or au Moyen-Âge. Son traité, qui date de 1498, parut à Venise en 1509 chez Paganinus de Paganinis de Brescia, il était dédié à Ludovic Sforza et fut achevé à Milan au milieu du cercle d'artistes et de savants qui entouraient la cour des Sforza.

Pour Luca Pacioli cette proportion mérite le qualificatif de divine pour cinq raisons :

1. Comme Dieu, elle est unique.
2. Comme la Sainte Trinité est une substance en trois personnes, elle est une seule proportion en trois termes
$$\frac{b}{a} = \frac{a+b}{b}$$
3. Comme Dieu ne peut se définir en paroles, elle ne peut s'exprimer par des nombres intelligibles (entiers) et par des quantités rationnelles, mais est toujours occulte et secrète et appelée par les mathématiciens *irrationnelle*.
4. Comme Dieu, elle est toujours semblable à elle-même.

La cinquième propriété étant le rôle qu'elle joue dans la construction des corps réguliers, en particulier le dodécaèdre, cinquième corps régulier de Platon pour qui ce corps était l'expression même de la quintessence ainsi que le rôle joué dans la construction du pentagone et du décagone. On sent percer dans l'expression de ces propriétés toute la mystique médiévale et toute l'admiration que l'on portait alors à la divine proportion. Celle-ci était en effet l'expression même de la beauté. Rien d'étonnant à ce qu'elle ait été utilisée de façon assez régulière dans les peintures de l'époque, surtout si on se rappelle que la peinture avait alors pour but d'illustrer les grands moments du drame chrétien et de susciter l'admiration des valeurs mystiques.

Conclusion

L'étude du nombre d'or donne lieu à de belles constructions géométriques. Cela n'implique pas qu'il faille accorder de la crédibilité aux croyances qui ont entouré ce nombre. On constate que la frontière est parfois ténue entre la science et la mystique et que le dérapage est parfois facile et tentant. Pour les grecs, l'Univers avait été conçu géométriquement. On pouvait comprendre l'harmonie de cette création par les rapports et proportions. Il était donc naturel pour eux de penser que la division en extrême et moyenne raison faisait partie des secrets de l'Univers et de la beauté. Cette conviction s'est perpétuée vers la fin du Moyen Âge et quelques peintres ont utilisé les pentagones dans l'organisation de leur peinture. Cependant, le développement de la perspective a donné aux artistes de la Renaissance un meilleur support géométrique pour l'éla-boration de leurs oeuvres.

On doit juger la vertu et l'essence du nombre à la puissance contenue dans la décade : car celle-ci est grande, parfaite et toute-puissante, elle est le commencement et le principe *directeur de la vie divine, céleste et humaine.*

PHILOLAOS

Un extrait du recueil « Les fleurs du mal » de Charles Beaudelaire (1821-1867), le poème « Le Serpent qui danse » mis en musique par Léo Ferré (1916-1994). Le rhythme est donné par des vers de huit et cinq pieds, deux nombres de la suite de Fibonacci.

Que j'aime voir, chère indolente,
De ton corps si beau,
Comme une étoffe vacillante,
Miroiter la peau !

Sur ta chevelure profonde
Aux âcres parfums,
Mer odorante et vagabonde
Aux flots bleus et bruns,

Comme un navire qui s'éveille
Au vent du matin,
Mon âme rêveuse appareille
Pour un ciel lointain.

Tes yeux, où rien ne se révèle
De doux ni d'amer,
Sont deux bijoux froids où se mêle
L'or avec le fer.

A te voir marcher en cadence,
Belle d'abandon,
On dirait un serpent qui danse
Au bout d'un bâton.

Sous le fardeau de ta paresse
Ta tête d'enfant
Se balance avec la mollesse
D'un jeune éléphant,

Et ton corps se penche et s'allonge
Comme un fin vaisseau
Qui roule bord sur bord et plonge
Ses vergues dans l'eau.

Comme un flot grossi par la fonte
Des glaciers grondants,
Quand l'eau de ta bouche remonte
Au bord de tes dents,

Je crois boire un vin de Bohême,
Amer et vainqueur,
Un ciel liquide qui parsème
D'étoiles mon coeur !

Bibliographie

Bouleau, Charles, Charpentes : la géométrie secrète des peintres / Charles Bouleau ; préface de Jacques Villon, Paris : Éditions du Seuil, 1973,

Lehning, Hervé, *L'équation du beau*, Tangente, Hors série n^{o} 22.

Moineau, J.-C., Mathématiques de l'esthétique, Paris : Dunod, 1969.

Warusfel, André, 1936 - Les nombres et leurs mystères / André Warusfel, Paris : Éditions du Seuil, 1970.